



动态几何压轴题的分析及教学启示

摘要：动态几何压轴题是近年来数学中考命题的一个热点，其中真正具有区分选拔功能的“压点”常常是有规律可循的。从数学思想维度分析，常有数形结合思想、分类思想、方程思想；从数学知识维度分析，常有相似三角形和函数。针对此内容提出一些教学建议。

关键词：动态几何；思想维度；知识维度；教学启示

动态几何题是近几年来数学中考命题的一个热点。根据运动元素，动态几何题可以分为“点动型”、“线动型”、“平面图形运动型”，它们通常对图形运动变化过程中的等量关系、变量关系、图形的特殊状态、图形间的特殊关系等进行研究考查。这类问题常常集几何、代数知识于一体，数形结合，有较强的综合性，因此常常成为许多省市数学中考试卷的压轴题，具有一定的区分选拔功能。

分析各地的数学中考试卷，动态几何压轴题虽然多变，但也有规律可循的，特别是真正具有区分选拔功能的“压点”问题。下面通过几道典型题，分别从数学思想和数学知识两个维度分析动态几何压轴题的规律，并提出相应的教学建议。

一、数学思想维度

各地的中考试题都十分重视对数学思想方法的考查，其解题过程都蕴含着重要的数学思想方法。作为肩负区分选拔功能的压轴题，数学思想更是在其中起着统领解题策略和思维的作用。

例 1 如图 1，已知射线 DE 与 x 轴和 y 轴分别交于点 $D(3, 0)$ 和点 $E(0, 4)$ 。动点 C 从点 $M(5, 0)$ 出发，以 1 个单位长度/秒的速度沿 x 轴向左作匀速运动，与此同时，动点 P 从点 D 出发，也以 1 个单位长度/秒的速度沿射线 DE 的方向作匀速运动。设运动时间为 t 秒。

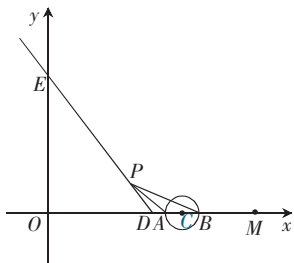


图 1

(1) 试用含 t 的代数式分别表示出点 C 和点 P 的坐标；

(2) 以点 C 为圆心、 $\frac{1}{2}t$ 个单位长度为半径的 $\odot C$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，连接 PA 、 PB 。

① 当 $\odot C$ 与射线 DE 有公共点时，求 t 的取值范围；

② 当 $\triangle PAB$ 为等腰三角形时，求 t 的值。

1. 数形结合思想

例题分析：例 1 与一般压轴题类似，遵循“入口宽，出口窄”

的原则。第(1)题学生不难得出答案 $C(5-t, 0)$ ， $P(3-\frac{3}{5}t, \frac{4}{5}t)$ 。

第(2)题难度有所提升，许多学生感到无从下手，原因在于该问题只提供了图 1 (点 C 在射线 DE 的右侧)，对于点 C 继续运动时， $\odot C$ 与射线 DE 的位置关系，学生在头脑中难以想象出来。

此时应大致画出点 C 继续运动的过程中， $\odot C$ 与射线 DE 几种不同相对位置关系时的典型图形，特别是点 C 运动到射线 DE 的左侧且 $\odot C$ 与射线 DE 有公共点时的图形 (如图 2)，图 1 和图 2 是点 C 运动过程中两个典型图形，由此学生对整个运动过程的了解逐步清晰，第(2)题解题思路的探求就有了抓手和思考的依据。

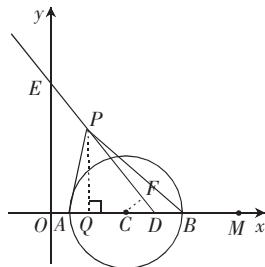


图 2

规律总结：动态几何压轴题一般只提供运动起始时或运动过程中某一时刻的图形，学生要解决问题，必须在数形结合思想的指引下，大致画出运动过程中各种状态下的典型图形 (包括一些特殊、临界状态的图形)，结合图形探求解题思路，结合图形书写解题过程。

教学启示：平时教学中应注重数形结合思想的渗透和培养，加强根据题意画出图形能力的训练，培养学生用运动与变化的眼光去观察和研究图形，把握图形运动与变化的全过程，以静制动，善于用图形去“捕捉”、“定格”各种不同的运动状态 (即

画出图形),特别是抓住某些特殊、临界状态.

2. 分类思想

例题分析:例1第(2)题第①问中,因为点C是运动的,所以一看到 $\odot C$ 与射线DE有公共点,就应立即想到与圆心C的位置有关,需分情况考虑:

当点C在射线DE的右侧或在射线DE上时,需满足 $0 \leq CD = 2 - t \leq \frac{1}{2}t$ (半径);

当点C在射线DE的左侧时,需满足 $\begin{cases} CF(\text{弦心距}) \leq \frac{1}{2}t(\text{半径}), \\ MC = t > MD = 2. \end{cases}$

分别求出t的范围,最后综合得出结论.例1第(2)题第②问中,一看到 $\triangle PAB$ 为等腰三角形,第一反应就应是这里面有多种情况,需逐一考虑:求 $PA = PB$; $AP = AB$; $BA = BP$.

分别求出对应的t值,最后综合得出结论.

规律总结:在中考中,命题者经常利用分类讨论题来加大试卷的区分度.动态几何压轴题也经常通过分类思想的应用来考查学生数学思维的深刻性、严密性,学生考虑不周、不深往往是这类试题失分的重要原因之一,因此分类思想是动态几何压轴题在数学思维维度的一个重要“压点”.

动态几何压轴题中,因为常有某些不确定的数量、图形形状或位置等不确定条件,为保证其完整性、使之具有确定性,通常需要分类讨论.常见的需要分类讨论的情况如下:

- (1) 已知图形运动,需按运动的位置进行分类讨论,如例1第(2)题第①问、例2第(2)、(3)题;
- (2) 已知等腰三角形(未注明两腰),需按两腰进行分类讨论,如例1第(2)题第②问;
- (3) 已知两个三角形相似(未注明字母对应关系),需按不同的对应关系进行分类讨论,如例2第(3)题;
- (4) 已知直角三角形(未注明直角顶点),需按直角顶点进行分类讨论;
- (5) 已知特殊四边形(未注明顶点字母顺序),需按顶点字母顺序进行分类讨论.

教学启示:分类思想是数学中一种非常重要、常见的思想,某些新知的形成过程中、某些问题的解决过程中,常常蕴含着分类思想.平时新授和复习教学中,应注重分类思想的渗透,教师讲解前先给学生分类讨论的机会,教师归纳总结后教给学生解答分类讨论问题的基本方法和步骤:

首先,要确定讨论对象的范围;

其次,分类标准,进行合理分类,即标准统一、不漏不重、分类互斥(没有重复);

再次,对所做分类逐步进行讨论,分级进行,获取阶段性结果;

最后,进行归纳小结,综合得出结论.

3. 方程思想

例题分析:例1第(2)题第①问中,当点C在射线DE的左

侧时, $\odot C$ 与射线DE有公共点需满足 $\begin{cases} CF(\text{弦心距}) \leq \frac{1}{2}t(\text{半径}), \\ MC = t > MD = 2, \end{cases}$

求t的范围需先求出弦心距CF这个中间量(用含t的代数式表示),直接求或逐步推导都很难.但我们发现有 $\triangle CDF \sim \triangle EDO$,则利用比例式 $\frac{CF}{EO} = \frac{CD}{ED}$ 可得含有中间量CF的方程 $\frac{CF}{4} = \frac{3-(5-t)}{5}$,解得 $CF = \frac{4t-8}{5}$,从而求得t的范围.

例1第(2)题第②问已知 $\triangle PAB$ 为等腰三角形求t的值,分类讨论的“大政方针”已定,下面我们可以将PA、PB、AB分别用含t的代数式表示出来,然后分别根据 $PA = PB$ 、 $AP = AB$ 、 $BA = BP$ 列出方程,求出对应的t值,最后综合得出结论.

规律总结:动态几何压轴题之所以成为压轴题,就是因为其综合性强,不仅仅是几何内部的综合,还牵涉到代数知识和思想方法.几何问题中最常用到的代数思想方法就是方程思想,用几何方法直接求或逐步推导某些几何量(或中间量)常因缺少条件而举步维艰,换个思路用方程去求某些几何量(或中间量)简便、快捷,往往可以起到意想不到的效果.

动态几何压轴题中,通常可以用来列方程的情况有:

- (1) 有直角三角形,通过勾股定理列方程;
- (2) 有等腰三角形、特殊四边形,通过其中的相等线段列方程,如例1第(2)题第②问;
- (3) 有相似三角形,通过比例式列方程,如例1第(2)题第①问、例2第(2)、(3)题;
- (4) 有直角三角形边角条件,通过边角关系(即三角函数)列方程;
- (5) 有面积关系,通过面积关系列方程,如例2第(2)题.

教学启示:动态几何压轴题中,许多几何量或中间量的计算要通过列方程来解决.教师在平时教学中,应注重方程思想的渗透,帮助学生建立起这样一种观念:欲求某些几何量,我们可以先设未知数,将其当作已知条件,把题目中的所有条件集中在一个图形中,通过勾股定理、相似三角形、等积变形等来建立方程求解,平时应加强这方面的训练.

二、数学知识维度

新课程下的数学中考试题都非常注重对初中数学核心内容和主干知识的考查,作为对一线教学起重要导向作用的压轴题更是不能例外.但因为肩负区分选拔功能,压轴题所考查的知识一般在难度和综合性方面均要求较高.

例2 如图3,在平面直角坐标系中,点C的坐标为(0,4), $A(t,0)(t>0)$ 是x轴上一动点,M是线段AC的中点.把线段AM绕点A按顺时针方向旋转 90° ,得到线段AB,过点B作x轴的垂线,过点C作y轴的垂线,两直线交于点D,直线DB交x轴于点E.

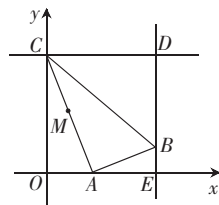


图3



(1) 若 $t=3$, 则点 B 的坐标为 _____;

(2) 设 $\triangle BCD$ 的面积为 S , 求 S 与 t 的函数关系式, 并求当 t 为何值时, S 的值等于 6;

(3) 是否存在 t , 使得以 B 、 C 、 D 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似? 若存在, 求此时 t 的值; 若不存在, 试说明理由.

1. 相似三角形

例题分析: 例 2 第(1)题为第(2)题作铺垫, 两小题均需求出 AE 、 BE 的长 (或是用含 t 的代数式表示的中间量). 因为 $\angle CAB = \angle COA = \angle AEB = 90^\circ$, 易得 $\triangle BEA \sim \triangle AOC$, 从而根据相似三角形对应边成比例易得 AE 、 BE 的长. 例 2 第(3)题已知以 B 、 C 、 D 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似, 因为 $\angle COA = \angle BDC = 90^\circ$, 所以两三角形相似的对应方式仅剩两种: $\triangle CDB \sim \triangle AOC$ 和 $\triangle BDC \sim \triangle AOC$, 从而根据相似三角形对应边成比例列方程易得 t 值. 当然, 例 2 第(2)题和第(3)题都应分别在图 3、图 4 两种情况下予以讨论解决.

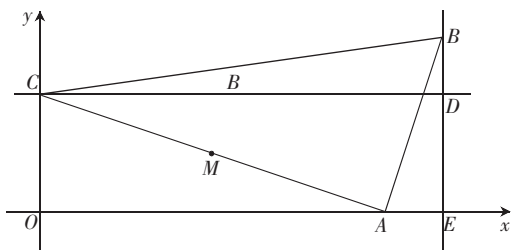


图 4

规律总结: 相似三角形是初中几何的核心内容和主干知识, 在直线型几何中, 无论是难度还是综合性, 它都当之无愧地占据着“制高点”的地位. 因此, 相似三角形是肩负区分选拔功能的压轴题经常考查的知识点.

在动态几何压轴题复杂变化的图形中, 要能熟练应用相似三角形知识, 需善于分解、抽取常见的三角形相似的基本图形. 如图 5~10 所示是常见的三角形相似的基本图形, 其中图 5、图 6 均来自于本文例 1; 图 8 来自于本文例 2; 在图 8~10 中, 当 $\angle CAB = \angle COA = \angle AEB$ 时, $\triangle BEA \sim \triangle AOC$ 均成立, 理由是一脉相承的.

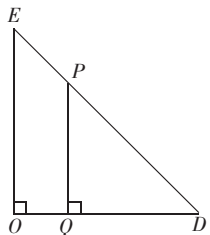


图 5

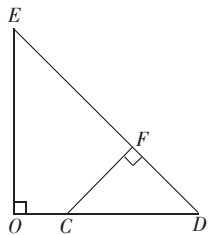


图 6

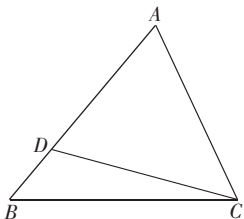


图 7

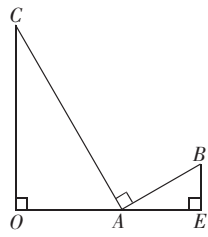


图 8

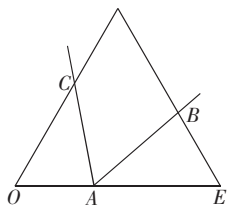


图 9

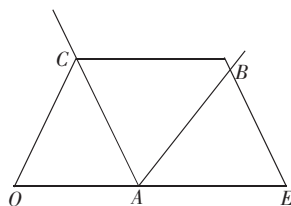


图 10

教学启示: 相似三角形由于对应边成比例构成比例等式, 因而成为初中几何中有关线段长度计算的重要途径和工具, 主要知识内容包括: 三角形相似的识别、利用比例式建立方程求线段或问题的中间量, 其中三角形相似的识别是基础. 在平时教学中, 应加强学生对复杂图形分解、基本图形识别的训练.

2. 函数

例题分析: 例 2 第(2)题中求 S 与 t 的函数关系式, 即用含 t 的代数式去表示 S , 因此可以将 t 看成已知量去求 S . 由 $\triangle BEA \sim \triangle AOC$, 根据相似三角形对应边成比例, 易得 $AE = 2$, $BE = \frac{1}{2}t$, 进而可得 $CD = OE = t + 2$. 当求 BD 时, 会出现“究竟是 $BE = \frac{1}{2}t \leq DE = 4$, 还是 $BE = \frac{1}{2}t > DE = 4$ ”的问题, 分类讨论自然水到渠成, 这里应抓住点 B 与点 D 重合这一特殊临界状态 (易得此时 $t = 8$) 进行分类讨论:

当 $0 < t \leq 8$ 时, (如图 3) $BD = 4 - \frac{1}{2}t$, $S = \frac{1}{2}CD \cdot BD =$

$$\frac{1}{2}(t+2)\left(4 - \frac{1}{2}t\right);$$

当 $t > 8$ 时 (如图 4) $BD = \frac{1}{2}t - 4$, $S = \frac{1}{2}CD \cdot BD = \frac{1}{2}(t+2)\left(\frac{1}{2}t - 4\right).$

规律总结: 函数是初中数学的核心内容和主干知识, 而且在动态几何题中, 一个元素的运动必然引起图形中其他几何量的变化, 因此在图形的运动变化过程中经常伴随着函数关系, 函数是动态几何压轴题常考查的知识点之一.

求两个变量之间的函数关系式, 即用含自变量的代数式去表示因变量, 因此可以将自变量看成已知量去求因变量. 动态几何题有时需根据图形运动的位置进行分类讨论, 进而得到分段函数, 注意应写出自变量的取值范围.

教学启示: 初中代数函数部分的内容主要可归为以下三方面: 函数关系的表示、函数的性质、函数的应用及函数思想的形成, 其中函数关系的表示是基础. 在平时教学中, 教师应多引导学生用代数式来表示中间量, 强化公式变形的训练, 特别应加强利用相似三角形来求出中间量, 从而建立函数关系式的相关训练.